

На правах рукописи



Попов Александр Николаевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ КАК ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ**

Специальность 2.1.9. — Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание степени
кандидата технических наук

Хабаровск — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тихоокеанский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ТОГУ»).

Научный руководитель:

ЛОВЦОВ Александр Дмитриевич,
доктор технических наук

Официальные оппоненты:

ПОТАПОВ Александр Николаевич,
доктор технических наук, профессор, профессор
кафедры «Строительное производство и теория
сооружений» ФГАОУ ВО «Южно-Уральский
государственный университет (национальный
исследовательский университет)», член-
корреспондент РААСН
БОЧКОВ Максим Иванович,
кандидат технических наук, доцент кафедры
«Строительная механика» ФГБОУ ВО
«Волгоградский государственный технический
университет»

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого», г. Санкт-Петербург

Защита состоится «15» декабря 2025 г. в 12-00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.414.01 в Томском государственном архитектурно-строительном университете по адресу: 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, корпус 2, зал заседаний Ученого совета (ауд. 303/2); тел.: 8-(3822) 659952.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Томского государственного архитектурно-строительного университета по адресу: 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, и на сайте <https://tsuab.ru/article/popov-aleksandr-nikolaevich?lang=ru>

Автореферат разослан «___» октября 2025 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

Копаница Наталья Олеговна

Актуальность темы исследования. В диссертационной работе рассматриваются конструктивно-нелинейные задачи контактного взаимодействия деформируемых тел. В строительных конструкциях такие задачи возникают, например, при расчете гидротехнических сооружений, фундаментов (свайных, висячих и ленточных), подпорных стен, шпунтовых ограждений, водопропускных труб, опор трения, кинематических опор сейсмоизолированных зданий и во многих других случаях. Учет контактного взаимодействия с трением между деформируемыми элементами строительных конструкций имеет важное значение для определения усилий и напряжений в конструкциях.

Существующие программные комплексы, такие как ANSYS и ABAQUS, используют для решения контактных задач следующие методы:

- Pure Penalty (Штрафные функции). Демонстрирует быструю сходимость, однако приводит к взаимопроникновению контактирующих тел;
- Method of Lagrange Multipliers (Множители Лагранжа). Обеспечивает отсутствие взаимопроникновения, но появляется сложность в обеспечении сходимости решения;
- Augmented Lagrange (Обобщенный метод Лагранжа). Представляет собой модификацию метода Pure Penalty с коэффициентами Лагранжа, что позволяет уменьшить взаимопроникновение в областях концентраторов усилий.

Эти методы имеют неустранимый недостаток – присутствие в них заранее заложенной погрешности решения. Стремление уменьшить эту погрешность приводит к увеличению количества итераций и к вероятности заикливания итерационного процесса или осцилляции получаемого решения.

Для работы этих методов необходимо настраивать ряд параметров, таких как: предельное взаимопроникновение тел, предельное значение упругого проскальзывания, жесткость контактных элементов, частота обновления жесткости контакта, количество шагов алгоритма и т.п. Корректная настройка этих параметров позволяет обеспечить приемлемую точность получаемого решения и сходимость алгоритма как по перемещениям, так и по усилиям в зоне контакта, однако требует высокой квалификации пользователя и знаний особенностей используемых алгоритмов решения.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью совершенствования методов расчёта, позволяющих избавиться от проблем сходимости итерационного процесса при точном учёте условий контакта и не требующих высокой квалификации конечного пользователя

Степень разработанности темы исследования.

Постановка задач контактного взаимодействия получила своё начальное развитие в работах таких учёных, как Синьорини А., Фикера Г., Дюво Г., Lions J.-L., Гольштейн Р.В., Glowinski R., Trémolières R., Кравчук А.С., Розин Л.А., Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А. и др. Эти исследователи заложили основы теории контактных задач в механике деформируемых тел, уделяя особое внимание моделированию контакта между телами, в том числе с учётом трения.

Значительный вклад в развитие алгоритмов и методов решения контактных задач внесли Вовкушевский А.В., Кравчук А.С., Панагиотопулос П.Д., Glowinski R. и Lions J.-L. Они разработали эффективные численные методы, базирующиеся на вариационных принципах и методах конечных элементов, что позволило решить широкий круг сложных контактных задач.

Работы Glowinski R., Lions J.-L. и Trémolières R. сыграли ключевую роль в развитии численных методов решения задач контакта на основе вариационных неравенств. Эти методы остаются основой современных подходов к решению задач контактного взаимодействия.

Решение задач контакта с трением остаётся важной и активно развивающейся областью исследований. Среди авторов в этой области можно отметить Бокей И.Б., Вовкушевского А.В., Дурнева В.А., Колесникова Г.Н., Кравчука А.С., Ловцова А.Д., Лукашевича А.А., Розина Л.А., Станкевича И.В., Aleksandrov V.M., Aydinoglu A., Barboteu M., Bathe K.J., Fazlyab M., Kalker J.J. и др.

Отметим Acary V., Brémond M., Raous M. и Sofonea M. как современных авторов обширных обзоров постановок контактных задач и методов их решения. Как показано в исследованиях, существует много постановок задач одностороннего контакта с трением и алгоритмов их

решения, отсюда можно сделать вывод об отсутствии единого подхода к решению задач контакта с трением. Более чем 40 лет назад появились первые работы по численному решению задач механики контакта с трением, однако активные исследования по этой теме все еще ведутся. Это можно объяснить тем, что задачи контакта с трением трудно поддаются численному решению, а математические результаты сходимости численных алгоритмов редки и большинство из них требуют довольно сильных допущений.

Линейная задача дополнительности (ЛЗД) возникла в математическом программировании и применялась к задачам оптимизации. Важный вклад в развитие методов решения ЛЗД был внесён такими учёными как Cottle R.W., Lemke C.E., Sargent R.W. и др. Позднее ЛЗД нашла применение в механике, включая задачи одностороннего контакта. Важный вклад в применение ЛЗД для решения задач контактного взаимодействия деформируемых тел внесли такие учёные, как Ким Т.С., Kwak B.M., Pang J.S. и др.

В настоящее время ЛЗД широко используется для решения задач одностороннего контакта. Вклад в её применение в контактных задачах внесли такие исследователи, как Аверин А.Н., Колесников Г.Н., Пузаков А.Ю., Фёдорова Н.В., а также зарубежные учёные, такие как Achik Y., Dubey D., Evers J., Figueiredo F.C., Flores P., Gao H., Li Y., Zhang Y., Liao L., Ma S., Wang T. и др.

Постановки задач контакта деформируемых тел в виде ЛЗД показали свою эффективность в задачах идеального контакта (когда не учитываются силы трения) или в задачах с известными предельными силами трения (когда прижимающие силы постоянны). К преимуществам методов решения ЛЗД относят: 1) возможность использования шаговых алгоритмов, что позволяет получить решение за конечное число шагов; 2) точное удовлетворение условий контакта.

Общий случай решения контактной задачи деформируемых тел в виде ЛЗД, когда учитываются силы трения и прижимающие силы меняются в процессе деформирования, не рассматривался.

В целом, можно констатировать, что несмотря на большое количество работ в области расчёта конструктивно-нелинейных задач, степень разработанности методов решения контактных задач с трением недостаточна. Задача контакта деформируемых тел с трением представляет собой важную и сложную область исследований и требует развития как в теоретическом, так и практическом плане. Применение линейной задачи дополнительности и методов её решения открывает новые возможности для более простого и эффективного моделирования контактного взаимодействия деформированных тел.

Объект исследования – контакт с трением деформируемых строительных конструкций или их частей.

Предмет исследования – постановка задачи контактного взаимодействия как линейной задачи дополнительности, разработка шаговых алгоритмов решения этой задачи.

Цель диссертационного исследования заключается в совершенствовании подходов к решению конструктивно-нелинейных задач контакта с трением путём разработки метода решения, позволяющего определить контактные усилия взаимодействия и взаимные перемещения в области контакта деформируемых тел с постановкой задачи контакта с трением в виде линейной задачи дополнительности.

Задачи исследования:

- 1) Провести анализ существующих методов решения контактных задач с трением. Проанализировать существующие методы решения контактных задач в виде ЛЗД, оценить их применимость для решения контактных задач с трением.
- 2) Разработать новый метод расчёта контактной задачи с трением, когда между деформируемыми телами заранее неизвестны области отрыва и контакта, а внутри области контакта неизвестны области сцепления и скольжения. Сформулировать новую постановку проблемы в смысле метода перемещений строительной механики как ЛЗД, и разработать алгоритмы её решения.
- 3) Программно реализовать предложенный метод. Провести тестирование разработанного метода на сложных для контактных алгоритмов задачах. Сравнить полученные результаты с аналитическими результатами и численными результатами, полученными

другими методами, выявить особенности работы алгоритмов и оценить их эффективность.

Научная новизна работы заключается в следующем:

Разработан метод расчёта задач одностороннего контакта с трением между деформируемыми телами. В методе используется новая эвристическая постановка задачи одностороннего контакта с трением в виде линейной задачи дополненности, полученная с использованием метода перемещений строительной механики.

Для решения новой постановки задачи разработаны модификации алгоритма Лемке решения ЛЗД, интерпретируемые как: алгоритм с искусственным обжатием; алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия. С помощью вышеуказанных алгоритмов можно гарантированно получить решение для дискретизованных задач за конечное число шагов, и точно выполнить условия взаимонепрониновения контактирующих тел.

Выявлены особенности решения контактных задач с трением в виде ЛЗД и показаны на модельных задачах.

Методология и методы исследования. В диссертационном исследовании использовались основные методы строительной механики, общепринятые в ней гипотезы, методы решения линейных систем уравнений и неравенств, линейной алгебры и теории упругости, работы по теории расчёта систем с односторонними связями в формулировке линейной задачи дополненности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием корректных математических моделей и методов, а также совпадением решений, полученных с помощью разработанных алгоритмов, с точными решениями и решениями, полученными в известных программных комплексах. Результаты можно считать достоверными для класса задач с трением, когда скользящие точки контакта деформируемых тел не переходят в состояние сцепления.

Научные положения и результаты, выносимые на защиту:

- 4) Постановка задачи одностороннего контакта с трением для деформированных тел в форме линейной задачи дополненности с использованием метода перемещений строительной механики.
- 5) Алгоритмы решения контактной задачи с трением в форме линейной задачи дополненности: алгоритм с искусственно введённым обжатием и алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия.
- 6) Программная реализация и верификация разработанных алгоритмов решения контактных задач, сравнение с аналитическими и численными результатами решения.

Практическая значимость работы определяется следующим.

Разработаны эффективные алгоритмы для решения контактных задач с трением, которые обеспечивают расчет в условиях, когда одно или несколько контактирующих тел способны перемещаться как жесткое целое. Шаговый процесс полученных алгоритмов не приводит к осцилляции решения при наличии зон контакта с силами трения, близкими или равными предельным по всей зоне контакта.

Предлагаемый метод решения упрощает процесс расчета контактных задач с трением, снижая требования к квалификации пользователя и облегчая его применение на практике. Новый метод требует указать только коэффициент трения.

Новая постановка контактной задачи и разработанные алгоритмы её решения легко интегрируются в современные программные комплексы, предназначенные для расчёта дискретизированных систем, использующих, например, метод конечных элементов или метод граничных элементов.

Созданы и программно реализованы алгоритмы расчета контактных задач, которые могут быть использованы в учебном процессе, проектных институтах и исследовательских лабораториях. На программную реализацию разработанного алгоритма получены свидетельства об официальной регистрации программы № 2022669000 «Contact LCP».

Теоретическая значимость заключается в постановке конструктивно-нелинейной задачи одностороннего контакта с трением в форме линейной задачи дополненности; в разработке новых методов расчёта контактных задач с трением.

Личный вклад автора состоит в получении эвристической постановки задачи контакта с трением в виде ЛЗД. Разобраны и модифицированы алгоритмы решения ЛЗД. Выявлены особенности решения поставленной задачи, описана интерпретация получаемых результатов. Программно реализованы алгоритмы решения контактной задачи с трением. Проведено тестирование полученных алгоритмов на множестве модельных задач одностороннего контакта с трением.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались на:

- 1) 54-й студенческой научно-технической конференции ТОГУ, Хабаровск, 2014;
- 2) Международной научно-практической конференции: «Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса», ТОГУ, Хабаровск, 2016, 2017;
- 3) VII Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», Новосибирск, 2018;
- 4) конференции «90 лет СК СПбГАСУ» секция каф. Железобетонных и каменных конструкций 11 июня 2021;

Достоверность полученных положений и выводов подтверждается следующим:

- 5) Получено 1 свидетельство об официальной регистрации программ.
- 6) Полученные результаты (методики, алгоритмы расчёта и данные расчётов) используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «ТОГУ» в курсе «Нелинейные задачи строительной механики», читаемом студентам, обучающимся по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».
- 7) Получены акты о внедрении (использовании) научных результатов работы в ОКР: от 25.04.2024 №16-24 ООО «Лидер Пласт 27»; от 27.06.2024 ООО «ДВПИ».

Публикации. Основные результаты исследований опубликованы в 13 работах, из них: 5 статьи в журналах, индексируемых в ВАК и RSCI; 2 статьи индексируемых в SCOPUS; 2 из них лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. *Результаты исследований изложены на 114 страницах машинописного текста, включая 54 рисунка, 28 таблиц, список литературы из 161 наименования.*

Основное содержание работы

1. Постановка контактной задачи с трением в виде ЛЗД

Рассматривается плоская задача одностороннего контакта деформируемых линейно-упругих тел с учётом трения. В качестве закона трения выбран «закон Амонтона — Кулона» (трение Кулона). В предлагаемой постановке контактных задач с трением полагается, что форма контактирующих поверхностей тел совпадает. Деформируемые тела контактируют «узел в узел» — эти узлы называются контактной парой.

За m обозначим число контактных пар. Предполагается, что в каждой контактной паре узлы соединены односторонними связями. Связь по нормали к поверхности контакта включена, когда эти узлы находятся в контакте (зона контакта), и выключена в противном случае (зона отрыва). Полагаем, что односторонняя связь по нормали работает только на сжатие. Связь по касательной к поверхности контакта в зоне контакта включена, если усилия взаимодействия меньше предельных сил трения $x_t < f \cdot |x_n|$ (зона сцепления), и выключена, если усилия взаимодействия равны предельным силам трения $x_t = f \cdot |x_n|$ (зона проскальзывания). То есть, при включенной связи проскальзывание узлов контактной пары невозможно, а при выключенной — возможно.

Принято следующее правило знаков:

– для усилий и перемещений по нормали к поверхности контакта: сжимающее усилие взаимодействия узлов i -ой контактной пары $x_{ni} > 0$; взаимное удаление узлов контактной пары $z_{ni} > 0$ (рис 1, а). Таким образом, если узел одного тела давит на узел второго тела, то их усилие взаимодействия в это контактной паре узлов считается положительным.

– для усилий и перемещений по касательной к поверхности контакта: если узлы контактной пары условно разнести по нормали к зоне контакта, то усилия взаимодействия $x_{ti} > 0$ создадут пару сил с моментом по ходу часовой стрелки; взаимное перемещение $z_{ti} > 0$, если совпадает по направлению с $x_{ti} > 0$ (рис. 1, б).

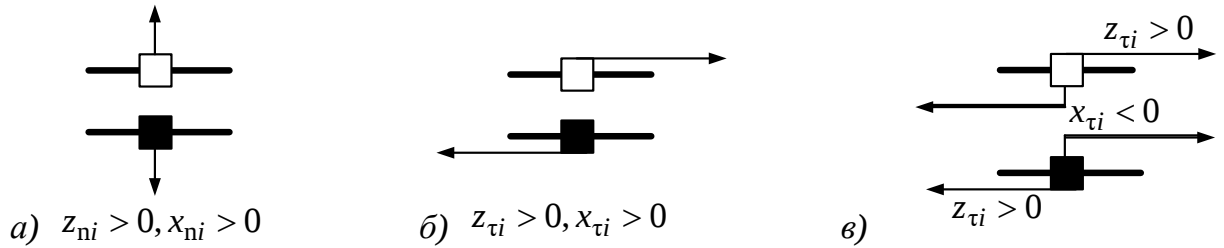


Рисунок 1 – Правило знаков для усилий взаимодействия x и взаимных перемещений z

Для реализации решения контактной задачи в виде ЛЗД необходимо сформировать контактную матрицу жёсткости (КМЖ) $\mathbf{R}$ и контактный грузовой вектор (КГВ) $\mathbf{R}_F$ в основной системе метода перемещений (МП). Основная система, получается из заданной превращением всех односторонних связей в двухсторонние.

ЛЗД для идеального одностороннего контакта имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{Fn}; \\ \mathbf{z}_n &\geq 0; \quad \mathbf{x}_n \geq 0; \quad \mathbf{z}_n^T \cdot \mathbf{x}_n = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где: $\mathbf{R}_{nn}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей в контактных парах по нормали к зоне контакта от единичной дислокации узлов контактных пар по нормали к зоне контакта; компонентой $\mathbf{R}_{nn \ i, j}$ КМЖ является усилие во введённой связи i от единичной дислокации контактной пары j ; $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{z}_n$ – векторы $[m \times 1]$ усилий взаимодействия и взаимных перемещений контактных пар по нормали к зоне контакта; $\mathbf{R}_{Fn}$ – КГВ $[m \times 1]$ для связей по нормали к зоне контакта; компонентой $\mathbf{R}_{Fni}$ КГВ является усилие во введённой связи i от внешнего воздействия.

Для контакта с известными предельными силами трения расчёт сведён к задаче условной оптимизации дифференцируемого функционала, условия Куна-Таккера которой приводят к ЛЗД вида:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tau\tau} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} \\ -\mathbf{R}_{\tau\tau} & \mathbf{R}_{\tau\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{F\tau} \\ -\mathbf{R}_{F\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_f \end{bmatrix}; \\ \mathbf{x}_\tau^+ &\geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; \\ \mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ &= 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

где: $\mathbf{R}_{\tau\tau}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей, введённых в контактных парах по касательной к зоне контакта от единичной дислокации контактных пар по касательной к зоне контакта; $\mathbf{R}_{F\tau}$ – КГВ для связей по касательной к зоне контакта; $\mathbf{x}_\tau = (\mathbf{x}_\tau^+ - \mathbf{x}_\tau^-)/2$ – вектор $[m \times 1]$ усилий взаимодействия контактных пар по касательной к зоне контакта; $\mathbf{z}_\tau = \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{z}_\tau^-$ – вектор $[m \times 1]$ взаимных перемещений контактных пар по касательной к зоне контакта; $\mathbf{r}_f = f \cdot \mathbf{x}_n$ – вектор предельных сил трения; f – коэффициент трения между контактными парами, $\mathbf{x}_n$ – вектор

прижимающих усилий; χ_{ti}^+ , χ_{ti}^- – представляют собой «резерв сцепления» контактной пары при тенденции смещения этой пары узлов по направлению $z_{ti} > 0$ (рис. 1); z_{ti}^+ , z_{ti}^- – взаимные перемещения точек контактной пары i в положительном и отрицательном направлениях, соответственно.

Обратимся далее к основной системе метода перемещений для рассматриваемой задачи. Основная система МП получается превращением всех односторонних связей трения в двухсторонние. Таким образом, проскальзывание точек контактной пары в основной системе исключено.

Векторы $\mathbf{x}_\tau$, $\mathbf{z}_\tau$ в основной системе связаны соотношением: $\mathbf{x}_\tau = -\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau$.

Аналогичными соотношениями будут связаны векторы $\mathbf{x}_\tau^+$, $\mathbf{x}_\tau^-$, $\mathbf{z}_\tau^+$, $\mathbf{z}_\tau^-$: при увеличении z_{ti}^+ уменьшается χ_{ti}^+ и увеличивается χ_{ti}^- ; при увеличении z_{ti}^- : увеличивается χ_{ti}^+ и уменьшается χ_{ti}^- .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\tau^+ &= -(-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+) + (-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-) = +\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-; \\ \mathbf{x}_\tau^- &= +(-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+) - (-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-) = -\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-.\end{aligned}$$

Если учесть еще внешнее воздействие и предельные силы трения, то

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + \mathbf{r}_f, \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + \mathbf{r}_f,\end{aligned}\tag{3}$$

что совпадает с системой уравнений (2).

В общем случае контакта с трением для формирования основной системы МП следует ввести двусторонние связи по нормали и по касательной к зоне контакта для каждой контактной пары. В основной системе усилия взаимодействия по нормали к зоне контакта $\mathbf{x}_n$ зависят не только от взаимных перемещений по нормали $\mathbf{z}_n$ (1), но и от взаимных перемещений по касательной к зоне контакта $\mathbf{z}_\tau$:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau + \mathbf{R}_{Fn},$$

где $\mathbf{R}_{n\tau}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей по нормали от единичных дислокаций по касательной к зоне контакта; $\mathbf{R}_{Fn}$ – КГВ для связей по нормали к зоне контакта. С учётом того, что $\mathbf{z}_\tau = \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{z}_\tau^-$:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}.\tag{4}$$

Для выражения (3), учтем зависимость $\mathbf{x}_\tau^+$, $\mathbf{x}_\tau^-$, в том числе, от $\mathbf{z}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + \mathbf{r}_f, \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + \mathbf{r}_f,\end{aligned}\tag{5}$$

где: $\mathbf{R}_{\tau n}$ – контактная матрица жесткости $[m \times m]$ для связей по касательной от единичных дислокаций по нормали к зоне контакта, отметим, что $\mathbf{R}_{\tau n} = \mathbf{R}_{n\tau}^T$; $\mathbf{r}_f$ – предельные силы трения, зависящие от прижимающих контактных сил взаимодействия (4):

$$\mathbf{r}_f = f \cdot \mathbf{x}_n = f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}).\tag{6}$$

В результате объединения (4) и (5) с учетом (6) имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_n &= \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}; \\ \mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}); \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}).\end{aligned}\tag{7}$$

Добавив к системе уравнений (7) условия неотрицательности и дополняющей нежёсткости из (1) и (2) приходим к ЛЗД для контакта с трением:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{nr} & -\mathbf{R}_{nr} \\ \mathbf{R}_{rn} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{rr} + f \cdot \mathbf{R}_{nr} & -\mathbf{R}_{rr} - f \cdot \mathbf{R}_{nr} \\ -\mathbf{R}_{rn} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & -\mathbf{R}_{rr} + f \cdot \mathbf{R}_{nr} & \mathbf{R}_{rr} - f \cdot \mathbf{R}_{nr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Fn} \\ \mathbf{R}_{Fr} + f \cdot \mathbf{R}_{Fn} \\ -\mathbf{R}_{Fr} + f \cdot \mathbf{R}_{Fn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_n \geq 0; \quad \mathbf{x}_n \geq 0;$$

$$\mathbf{z}_n^T \cdot \mathbf{x}_n = 0;$$

$$\mathbf{x}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0;$$

$$\mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ = 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0.$$

Полученная постановка задачи с точностью до обозначений совпадает с ЛЗД:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{Rf},$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{x} = 0.$$

В постановке задачи можно учесть начальный зазор по нормали к зоне контакта в контактных парах. В общем случае условие неотрицательности имеет вид $z_{ni} + \eta_i > 0$, дополняющей нежёсткости $x_{ni} \cdot (z_{ni} + \eta_i) = 0$. Обозначим $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_n + \boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta}$ – вектор взаимных начальных зазоров в зоне контакта с компонентами η_i – взаимными зазорами i контактной пары до приложения нагрузки. Тогда, после преобразования получается, что в постановке задачи (8) достаточно изменить грузовой вектор для учёта начальных зазоров по нормали к зоне контакта:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{R}_{Fr} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{R}_{nr} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ -\mathbf{R}_{Fr} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{R}_{nr} \cdot \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

2. Алгоритм решения ЛЗД

Существует множество методов решения ЛЗД. Для расчёта выбран шаговый метод Лемке. Алгоритм представляет собой физическую последовательную смену рабочих схем, что позволяет легко интерпретировать текущее состояние системы на любом шаге алгоритма. Поскольку рассматривается дискретизованная задача, в качестве инструмента решения выбран МКЭ. Для написания программы был выбран язык программирования Python.

Метод Лемке представляет собой известный способ решения множества дискретных моделей систем, которые возможно свести к ЛЗД. Для решения задача расширяется путём введения параметра p :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{Rf} + p \cdot \mathbf{e},$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{x} = 0, p \geq 0, \quad (10)$$

где: $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ – векторы усилий взаимодействия и взаимных перемещений $[n \times 1]$; $\mathbf{R}$ – заданная квадратная матрица $[n \times n]$; $\mathbf{Rf}$ – заданный вектор $[n \times 1]$; p – параметр расширения задачи; $\mathbf{e}$ – вектор $[n \times 1]$, заполненный единицами.

Для известного метода Лемке разработаны две модификации, интерпретируемые как алгоритм с искусственно введённым обжатием и алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия.

Физический смысл решения ЛЗД алгоритмом с искусственно введённым обжатием описывается так:

1. Все контактные пары в заданной системе одинаковой прижимаются силой («пригрузом»/«обжатием») p , одинаковой для всех контактных пар. Параметр p определяется из условия, что одна из контактных пар находится в состоянии момента отрыва $x_i = 0, z_i = 0$.

2. Шаговый процесс представляет собой определение минимально значения «пригруза» p , необходимого для смены рабочих схем. Другими словами, шаговый процесс представляет собой последовательную смену рабочих схем (включение / выключение односторонних связей) при

уменьшении «пригруза» p . На каждом шаге определяются значения компонент векторов усилий взаимодействия и взаимных перемещений $\mathbf{x}, \mathbf{z}$.

Остановка шагового процесса происходит, когда: 1) искусственно введённый параметр «пригруза» p уменьшается до нуля (это считается *нормальным* решением); 2) на определённом шаге становится невозможно уменьшить значение параметра p . Это означает что дальнейшее уменьшение p превратит систему в механизм (такое решение называется *лучевым*).

Физический смысл решения ЛЗД **алгоритмом с нарастающим параметром внешнего воздействия** представляет собой последовательную смену рабочих схем (отличающихся одна от другой включением или выключением односторонних связей) при параметрическом росте внешнего воздействия. В этом случае p является параметром роста внешнего воздействия. Это освобождает от необходимости построения алгоритма обнаружения смены рабочих схем при параметрическом росте нагрузки.

Результатом решения ЛЗД являются усилия взаимодействия $\mathbf{X}$ и взаимные перемещения $\mathbf{Z}$ в зоне контакта, зная которые, легко восстановить напряжённо-деформированное состояние (НДС) рассматриваемой системы.

Описанные выше алгоритмы решения ЛЗД реализованы в программе ContactLCP, написанной на языке Python. Следует отметить, что алгоритмы получают точное решение без учёта ошибок округления. Ошибки округления вносят погрешность в получаемые результаты расчёта линейной задачи дополнительности, это влияет на взаимные перемещения и усилия взаимодействия. В сложных для алгоритма случаях погрешность составляет около 10^{-8} м для взаимных перемещений и 10^{-8} Н для усилий взаимодействия.

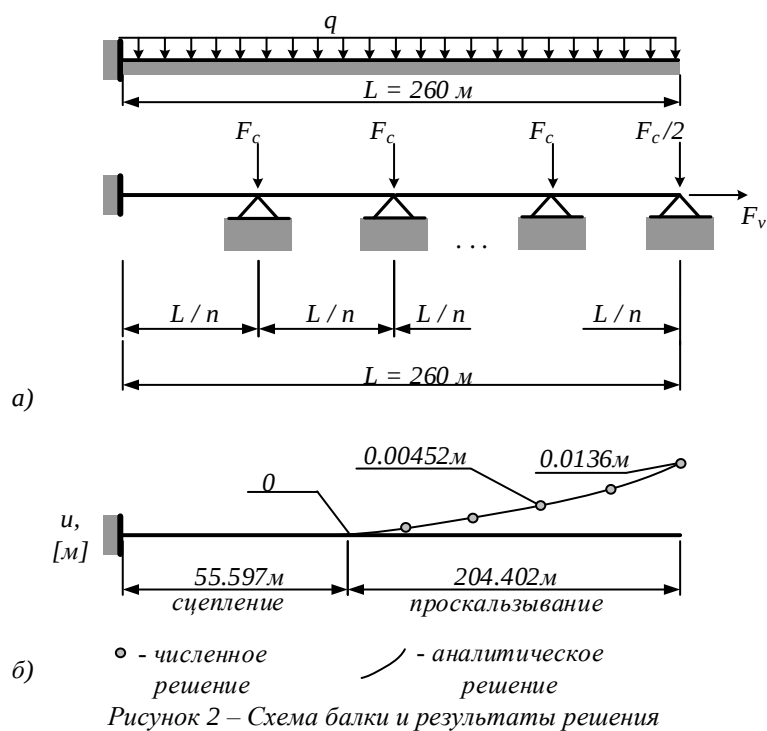
Стандартный алгоритм Лемке может не получить решение при работе с задачами, в которых встречаются случаи одновременного касания/отрыва нескольких контактных пар и происходит накопление ошибок округления. Для этого проделана модификация стандартного алгоритма Лемке решения ЛЗД – введён дополнительный параметр, позволяющий корректно завершать его работу.

3. Тестирование разработанного метода решения контактных задач.

В данном разделе представлены результаты тестирования разработанного метода решения контактных задач, реализованного в написанной программе ContactLCP. Полученные решения сравниваются с аналитическими вычислениями и численными расчётами, выполненными с использованием программного комплекса ANSYS.

Пример 1. Рассматривается стержень длиной L , опёртый на жёсткое основание, с левого конца стержень жёстко зашкреплен и нагружен прижимающей вертикальной равномерно распределённой нагрузкой q (рис. 2, а). В качестве нарастающей нагрузки рассматривается продольная сила на правом конце F_v . Данная задача является контактной задачей с известными предельными силами трения и имеет аналитическое решение, полученное Ловцовым А.Д.

Приведём сравнение аналитического решения с численным, полученным предлагаемым методом при $L = 260 \text{ м}$, $q = 3975 \text{ Н/м}$, $F_v = 243750 \text{ Н}$, модуль упругости $E = 1.95 \times 10^{10} \text{ Па}$, площадь поперечного сечения $A = 0.093619 \text{ м}^2$. Основание моделируется набором дискретных жёстких опор. Для моделирования стержня используется плоский рамный конечный элемент (КЭ) с тремя степенями свободы в узле. Стержень разбивается на $n = 10$ элементов. Узлы КЭ контактируют с опорами по схеме трения Кулона. Сосредоточенная вертикальная прижимающая сила в узле составляет $F_c = q \cdot \frac{L}{n}$. Коэффициент трения f принят равным 0.3. Результаты по продольным перемещениям стержня при $n = 10$ приведены на рис. 2, б.



Для оценки точности получаемого решения сравнивались перемещения узлов сетки конечных элементов с соответствующими перемещениями точек аналитического решения. Перемещения правого конца стержня $u_{\text{числ}}$ (для численного решения) и относительная погрешность u_{err} в зависимости от количества принятых элементов n показана в таблице ниже (расхождение результатов в знаках подчёркнуто). Перемещения правого конца стержня в аналитическом решении составляют $u_{\text{аналит.}} = 0.01364583$ м.

n	4	8	16	32	64	128	256	512
$u_{\text{числ}}, \text{ м}$	0.013 <u>3305</u>	0.013 <u>5346</u>	0.01364 <u>16</u>	0.01364 <u>26</u>	0.01364 <u>46</u>	0.0136458	0.013645 <u>7</u>	0.0136458 <u>3</u>
$u_{\text{err}}, \%$	1.95	1.13	4.65e-2	3.67e-2	2.52e-3	4.08e-4	9.16e-4	1.61e-4

Таким образом, для рассмотренного примера при сгущении сетки конечных элементов численное решение стремиться к точному.

Пример 2. Рассматривается классическая тестовая задача для алгоритмов решения задач одностороннего контакта. Балка на односторонних опорах. А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер Расчетные модели сооружений и возможность их анализа, Киев: «Сталь», 2002, стр. 122.

Необходимо определить реакции опор (усилия взаимодействия) и перемещения балки в точках взаимодействия с опорами (взаимные перемещения). Представлена трехпролетная балка с заделкой одного торца слева и тремя жесткими односторонними опорами (рис. 3), работающими на сжатие, под действием сосредоточенных сил. Изгибная жесткость балки $EI = 44.5 \text{ тс} \cdot \text{м}^2$, нагрузки: $F1 = 0.70707 \text{ тс}$, $F2 = -4.3597 \text{ тс}$, $F3 = 2.1155 \text{ тс}$.

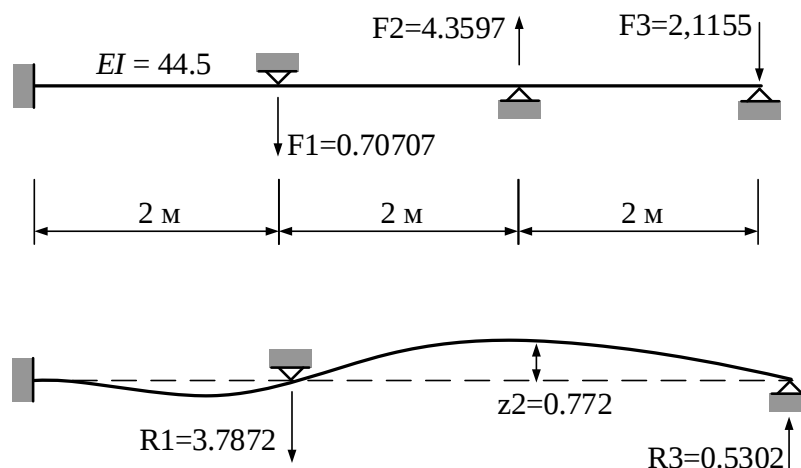


Рисунок 3 – Схема балки и результаты решения

Ниже показана таблица результатов, полученных аналитически, в ПК «ЛИРА-САПР» (взято из верификационного отчёта) и в разработанной программе ContactLCP.

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	ЛИРА	Погрешность ЛИРА, %	ContactLCP	Погрешность ContactLCP, %
2	z_2 , м	0.0772	0.077341	0.1826	0.0771891	0.0141
3	R_1 , т	3.7872	3.8594	1.9064	3.85079818	1.6793
4	R_2 , т	0.5302	0.5271	0.5881	0.53015455	0.0086

Следует отметить, что для решения подобных задач с односторонними жёсткими опорами, в программном комплексе ПК «ЛИРА-САПР» необходимо задаваться жёсткостью односторонних связей, влияющей на результаты расчёта. Также необходимо указывать количество шагов и итераций расчёта. В ПК «ЛИРА-САПР», согласно верификационному расчёту, для решения данной задачи задаётся 1 шаг, 1000 итераций и погонная жёсткость односторонних связей $EA/L = 1e6$ тс/м. В ContactLCP решение получается за 2 шага, нет необходимости задавать жёсткость односторонних связей и параметры итерационного процесса. Разработанный метод решения контактных задач способен решать задачи как с трением, так и без трения.

Пример 3. Задача представляет собой три вертикальные пластины (плоское напряжённое состояние) одинаковых размеров и жёсткостей с равными зазорами между ними (рис. 4). Узлы пластин в основании закреплены от линейных смещений. Характеристики пластин: E – модуль упругости, t – толщина пластины, μ – коэффициент Пуассона. Для моделирования пластин используется плоский четырёх-узловой конечный элемент (КЭ) с двумя степенями свободы в узле, размеры каждого элемента 0.25×0.25 м. Коэффициент трения $f = 0.19$.

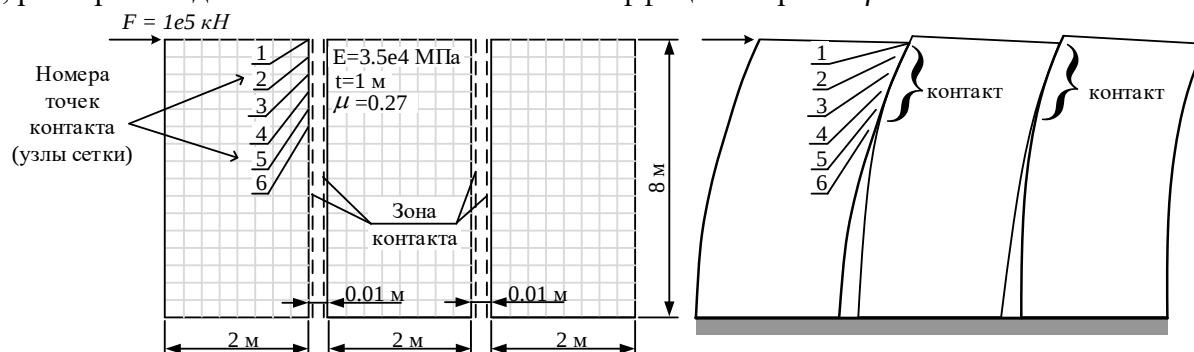


Рисунок 4 – Схема контактирующих пластин с зазорами.

Решение задачи получено в ContactLCP и в программном комплексе (ПК) ANSYS с целью сравнения результатов. В обоих случаях использовались одинаковые элементы и сетка КЭ.

Контактные напряжения по нормали и по касательной к зоне контакта между левой и центральной пластиной представлены графиками и таблицей на рисунках 5, 6.

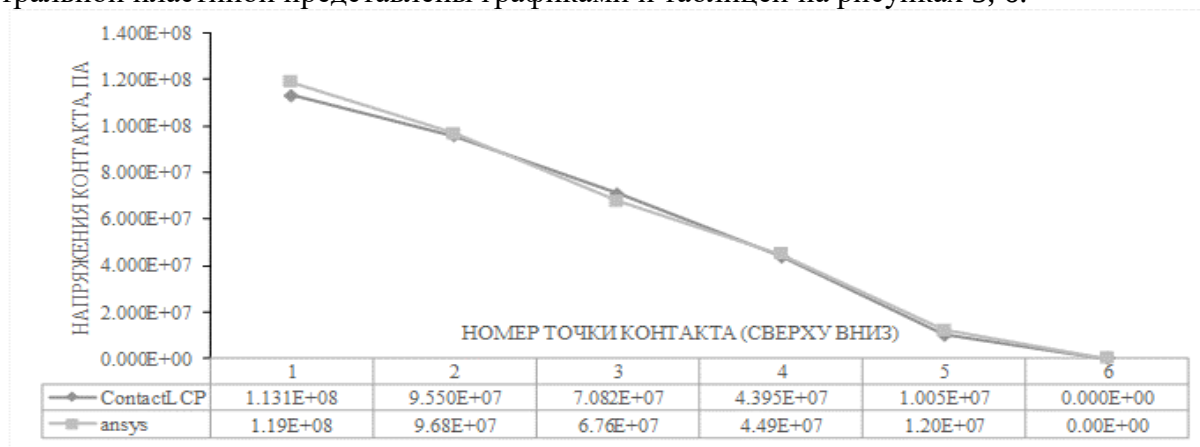


Рисунок 5 – Нормальные напряжения в зоне контакта

Для нормального напряжения в зоне контакта минимальная разница в результатах решений составляет 1.29% в точке контакта 2 (рис. 4). Максимальная разница составляет 16.2% в точке 5, что объясняется малостью сравниваемых величин вблизи зоны отрыва.

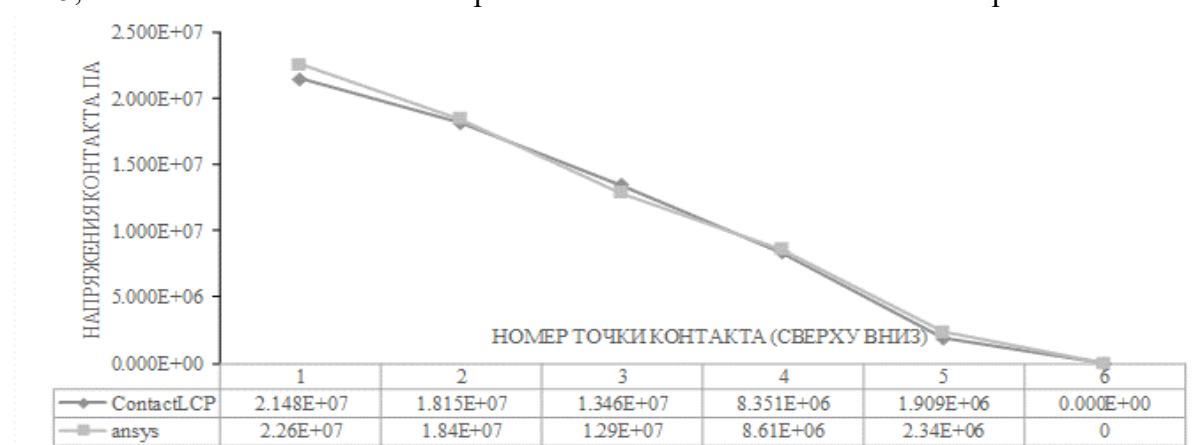


Рисунок 6 – Касательные напряжения в зоне контакта

Для касательного напряжения в зоне контакта минимальная разница в результатах решений составляет 1.53% в точке контакта 2 (рис. 4). Максимальная разница составляет 18.3% в точке 5, где напряжения малы.

Вывод: сравниваемые решения, полученные при помощи ANSYS и разработанного алгоритма, практически совпадают. Для получения решения ContactLCP потребовалось 142 шага, а ANSYS потребовалось 238 итераций.

Пример 4. Характерной особенностью алгоритмов решения контактных задач является сложность обеспечения сходимости решения: 1) при наличии концентраторов напряжений; 2) при наличии зоны проскальзывания по большей части зоны контакта, особенно когда одно из тел способно смещаться как жёсткое целое. Рассматриваемый пример демонстрирует недостатки распространённых методов решения контактных задач с трением, сравниваются результаты расчетов, полученные в ContactLCP с результатами расчёта, полученными в программном комплексе ANSYS, имеющем набор эффективных алгоритмов для решения задач контакта с трением.

Рассматривается плоское напряжённое состояние двух тел контактирующих с трением (рис. 7). На рисунке обозначены E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, t – толщина пластины, f – коэффициент трения, $gap1$ и $gap2$ – ненулевые зазоры. Узлы нижнего тела в основании закреплены от линейных смещений. Контактующие тела разбиваются на квадратные или близкие к нему четырёхугольные элементы так, чтобы реализовать контакт «узел в узел».

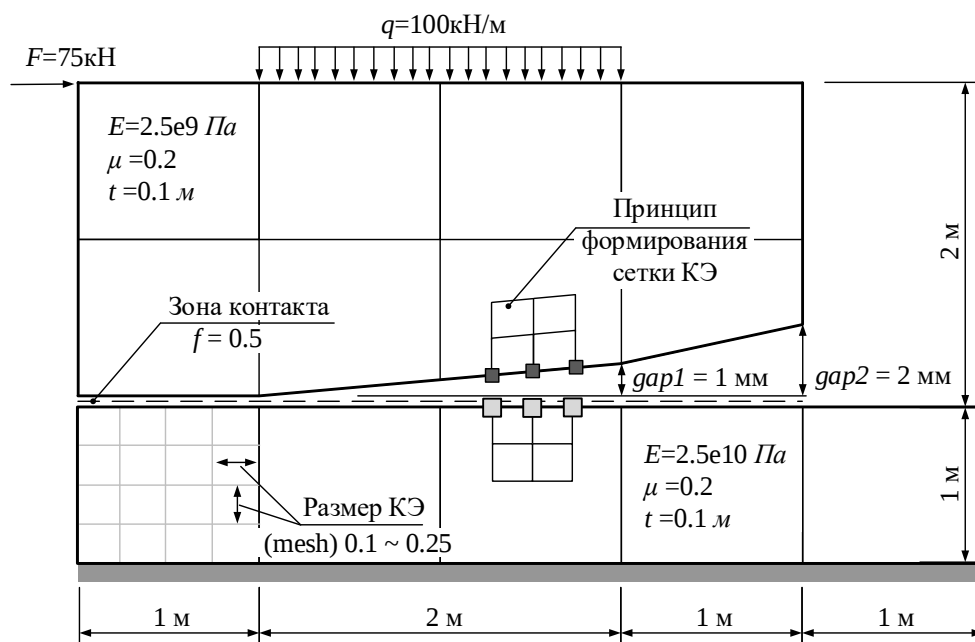


Рисунок 7 – Расчётная схема

Решение в программном комплексе ANSYS зависит от сгущения сетки КЭ (mesh) и от настройки параметров контакта. При расчёте в ANSYS пользователь может задать ряд настраиваемых параметров, которые способны существенно повлиять на результаты решения, либо оставить все параметры программно-контролируемыми, и они будут подбираться автоматически, с учётом настроек, принятых разработчиком.

На рисунке 8 показана деформированная схема. Точки контакта пронумерованы слева направо от 1 до 161. В точках 121 и 161 возникают концентраторы напряжений (вследствие формы поверхности контакта верхнего тела). Так же показаны номера характерных точек отражающих положение зон отрыва (точки 1-56), скольжения (56-63) и сцепления (63-161). Расстояние между соседними точками контакта составляет 0.025 м.

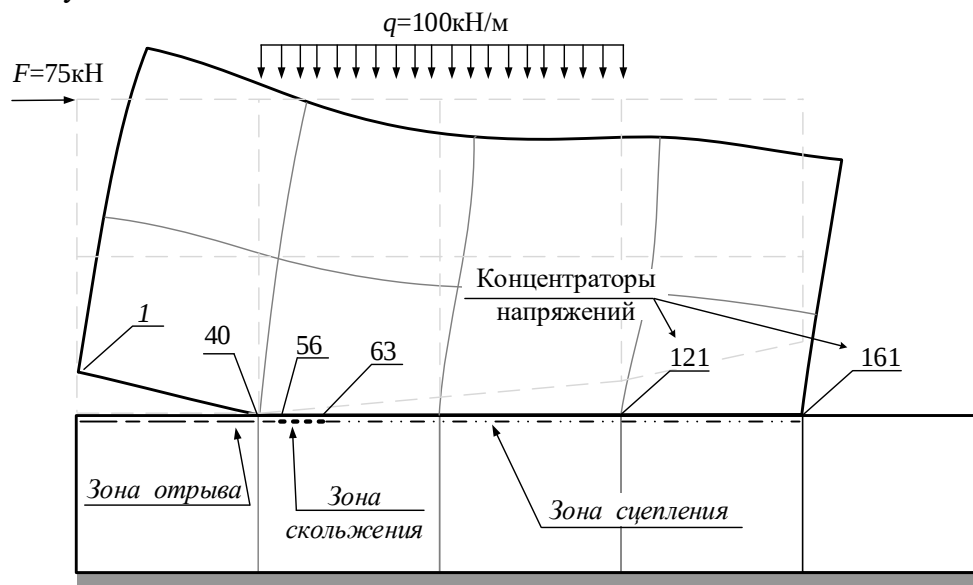


Рисунок 8 – Деформированная схема

На рисунке 9 показано сравнение результатов решения ContactLCP на «грубой» сетке с результатами ANSYS на «грубой» и «густой» сетке по нормальным напряжениям в зоне контакта. На графиках приведена легенда в виде «LCP 0.1», где LCP означает результаты, полученные в ContactLCP, а число обозначает размер КЭ равный 0.1 м; «ansys 0.1» означает результаты, полученные в ПК ANSYS с размером КЭ равным 0.1 м. В зоне отрыва контактных напряжений не возникает, поэтому все графики здесь и далее показаны начиная с точки 41.

Отметим, что при сгущении сетки КЭ решение ANSYS существенно приблизилось к решению, полученному в ContactLCP.

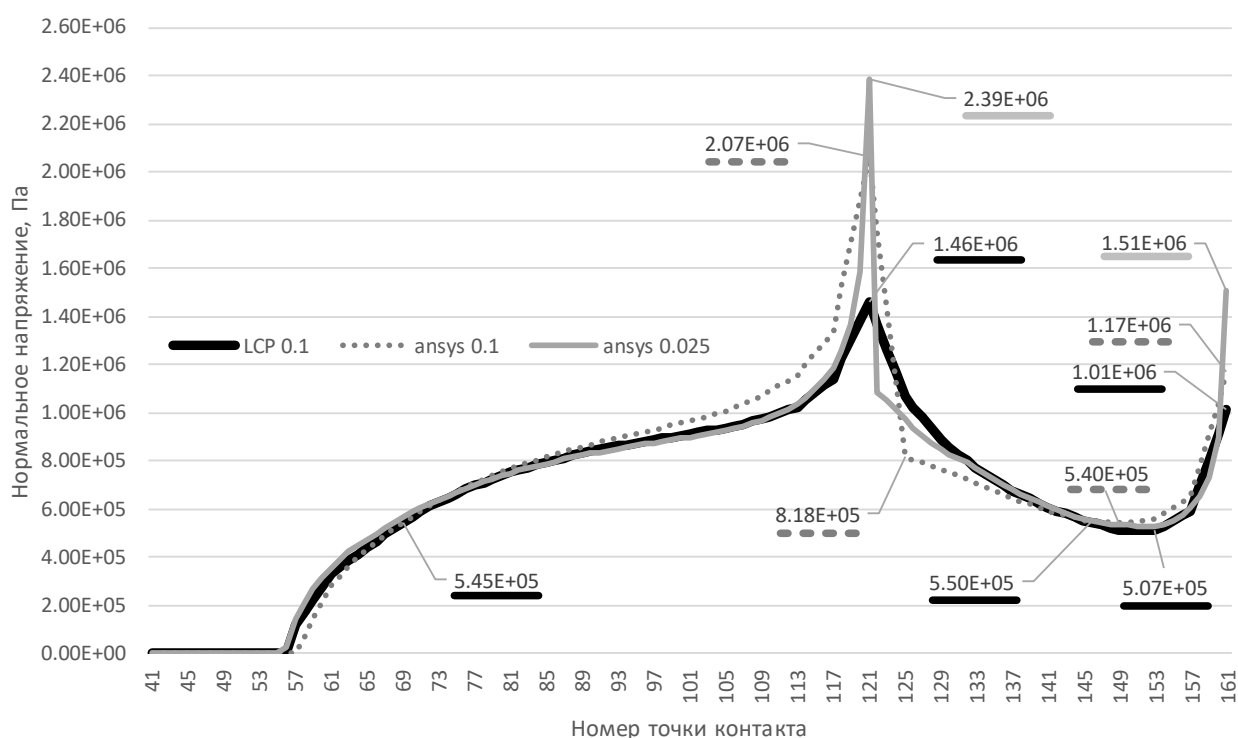


Рисунок 9 – Нормальные напряжения в зоне контакта LCP(mesh=0.1) и ANSYS(mesh=0.1, 0.025)

При сгущении сетки КЭ с mesh=0.1 до mesh=0.025 в ContactLCP решение изменяется незначительно, за исключением мест концентрации напряжений (точки 121 и 161) и, поэтому, решение LCP 0.025 на рисунке не показано.

В таблице ниже показана разница Δ (%) по нормальным контактным напряжениям в характерных точках для «LCP 0.1» и «ansys 0.025» (рис. 9):

№	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161
Δ , %	20.009	6.9671	7.987	3.3102	1.4003	0.1323	0.4739	0.8672	1.1173	1.2573	1.3067	1.2351	0.9968	0.4581	1.0733	4.2202	63.082	10.242	4.283	0.4355	0.1223	0.643	1.5427	3.9651	4.3559	1.8702	48.681

Естественно, что напряжения в концентраторах напряжений будут расти при сгущении сетки КЭ, что объясняет существенную разницу по напряжениям в точках 121 и 161.

По полученным результатам можно сделать вывод о том, что при сгущении сетки КЭ величины нормальных контактных напряжений, получаемые в ANSYS, стремятся к величинам контактных напряжений, полученным в ContactLCP на грубой сетке КЭ. Подобная ситуация наблюдалась при решении этой и многих других задач.

На рисунке 10 показаны касательные напряжения в зоне контакта, полученные в ContactLCP, ANSYS (значения по умолчанию) и в «ANSYS настроенный» (с настройкой описанных ниже параметров) для одинаковой сетки КЭ (mesh=0.025).

Сравним результаты, полученные «LCP 0.025» и «ansys 0.025» без дополнительной настройки. Следует обратить внимание на отличие по касательным напряжениям, которое наблюдается в точках с 57 по 62, где нормальные контактные напряжения малы и происходит проскальзывание влево верхнего тела относительно нижнего.

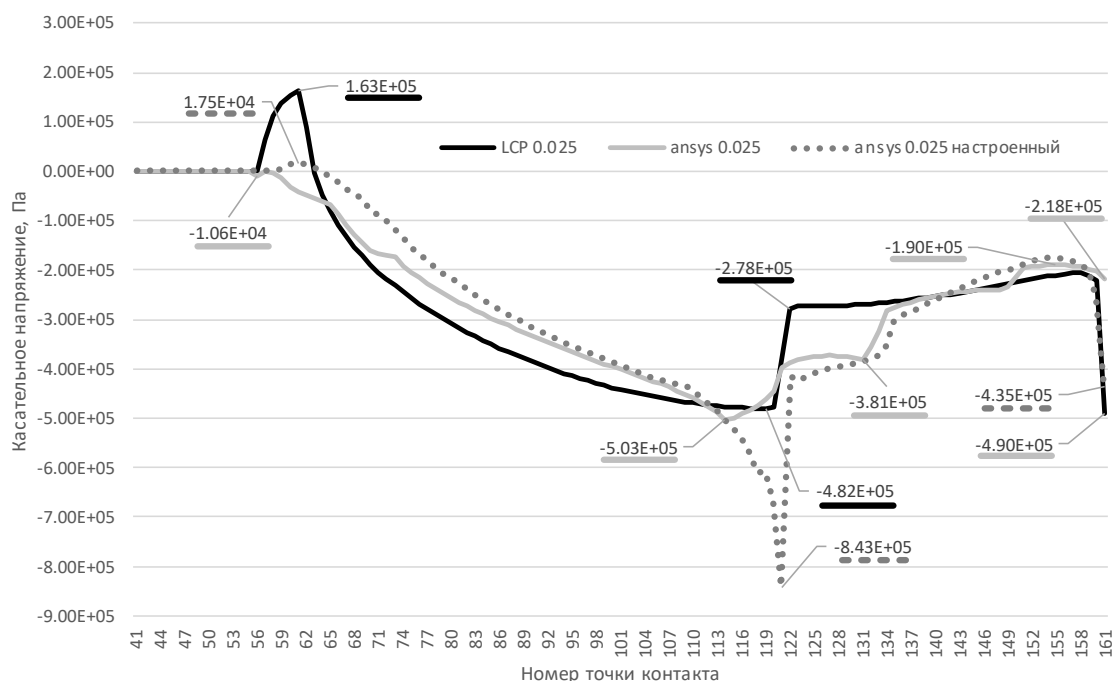


Рисунок 10 – Касательные напряжения в зоне контакта ANSYS и ContactLCP. Mesh=0.025

Существенное различие по касательным напряжениям показывает, что программно-контролируемых настроек алгоритма ПК ANSYS (настроек по умолчанию) недостаточно для получения более точного решения. Соответственно в ПК ANSYS необходимо вручную настраивать параметры контакта, влияющие на точность.

Список настроенных параметров:

- Метод обнаружения контактных пар: узел в узел (Nodal-Nodal from contact).
- Формулировка задачи: Метод множителей Лагранжа (Normal Lagrange).
- Допустимая величина упругого скольжения: $1e-5$ м. (Elastic slip tolerance). При указании значения меньше данного, процесс решения не сходится.
- Малые перемещения при скольжении: включены. (Small sliding).
- Слабые пружины: отключены. (Weak Springs). При возможности перемещения тела как жёсткого целого ANSYS может установить пружины малой жёсткости для повышения устойчивости решения, которые влияют на получаемые результаты.
- Способ решения: прямой. (Solver type: Direct). Есть выбор итерационного способа, но руководство советует с формулировкой метода множителей Лагранжа использовать прямой метод.

Настройка параметров осуществляется с целью более строгого выполнения условий контакта, поскольку в алгоритмы ANSYS заранее заложена погрешность выполнения этих условий.

Из рисунка 10 видно, что ANSYS при настройке параметров смог уловить область скольжения узлов 57-62 верхнего тела влево. Также стали выражены концентраторы напряжений в точках 121 и 161. Последующее сгущение сетки КЭ в ПК ANSYS приводит к осцилляции решения по касательным напряжениям. При использовании коэффициентов трения больше 0.2 ANSYS предупреждает, что это может повлиять на качество численного решения (возможна осцилляция решения) и ухудшить его сходимость.

Исследуем далее влияние коэффициента трения на результаты расчёта по касательным контактным напряжениям. Добавим шарнирно подвижные опоры для верхнего тела справа, остальные параметры (жёсткость, размеры, нагрузки) не изменяются (рис. 11). Опоры справа добавляются для отслеживания распределения касательных напряжений, когда по всей зоне контакта реализуется проскальзывание верхнего тела по нижнему.

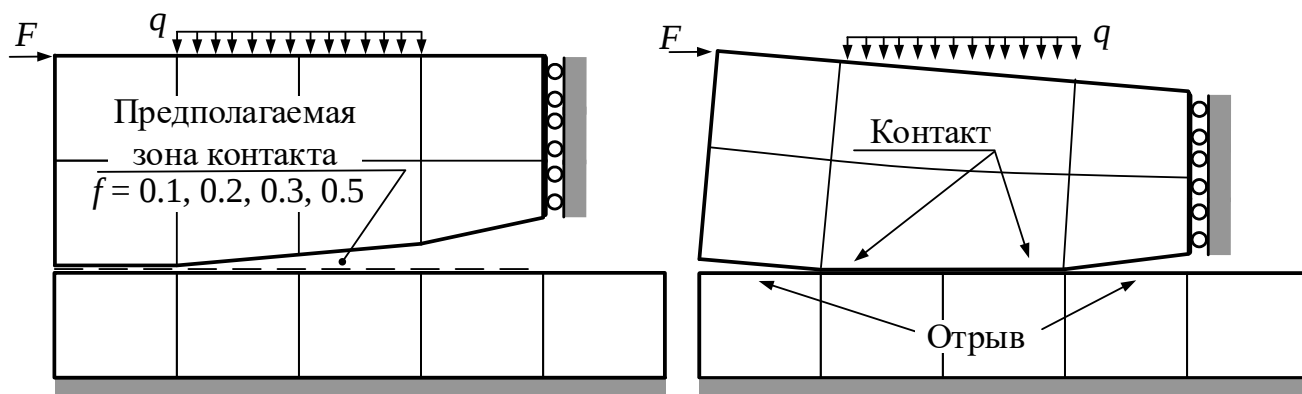


Рисунок 11 – Расчётная и деформированная схема. Добавление опор для верхнего тела.

На рисунке 12 показаны касательные напряжения в зоне контакта при коэффициенте трения $f = 0.1$. В этом случае скольжение наблюдается по всей зоне контакта. Результаты, полученные на «грубой» сетке КЭ ContactLCP, практически совпадают с результатами на «густой» сетке ANSYS.

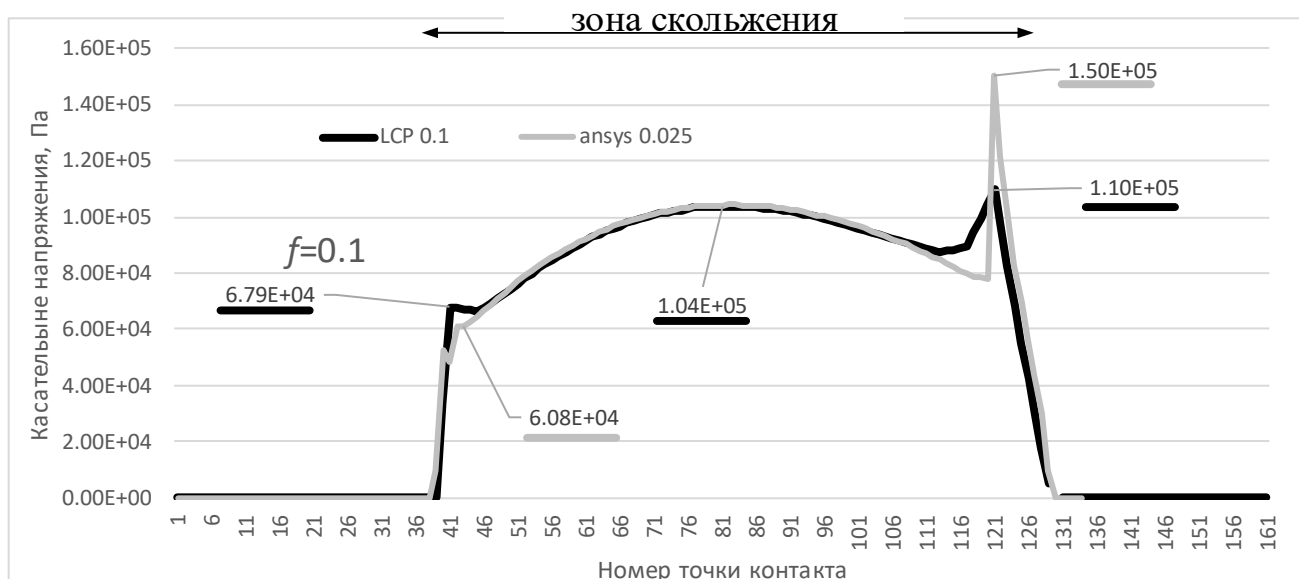


Рисунок 12 – Касательные напряжения при $f=0.1$. LCP(mesh=0.1) и ANSYS(mesh=0.025)

На рисунке 13 показаны касательные напряжения в зоне контакта при коэффициенте трения $f = 0.15$, полученные в ContactLCP, ANSYS и «ANSYS настроенный». В этом случае скольжение так же реализуется во всех контактных парах. По результатам решения ANSYS видно, что при выборе параметров контактного взаимодействия по умолчанию («ansys 0.025») напряжения в точках 104-121 уменьшаются, это происходит по причине появления зоны сцепления. При уточнении настроек («ansys 0.025 настроенный») зона сцепления исчезает и решение ANSYS сближается с решением ContactLCP («LCP 0.1») на более грубой сетке КЭ.

При увеличении коэффициента трения до $f = 0.3$ результат решения ANSYS по касательным напряжениям начинает осциллировать в зоне сцепления. На рисунке 14 показаны касательные напряжения в зоне контакта, полученные в ContactLCP (mesh=0.1) и в ANSYS (mesh=0.0125). В этом случае появляется зона сцепления в точках контакта 78-127.

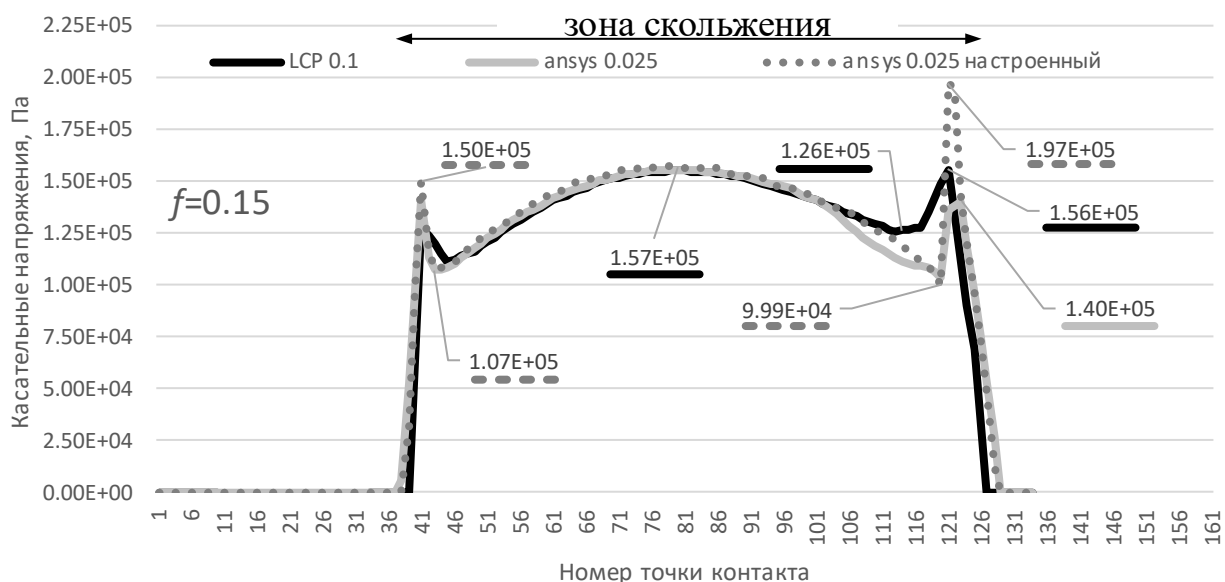


Рисунок 13 – Касательные напряжения при $f=0.15$. LCP(mesh=0.1), ANSYS(mesh=0.025) и ANSYS настроенный (mesh=0.025)

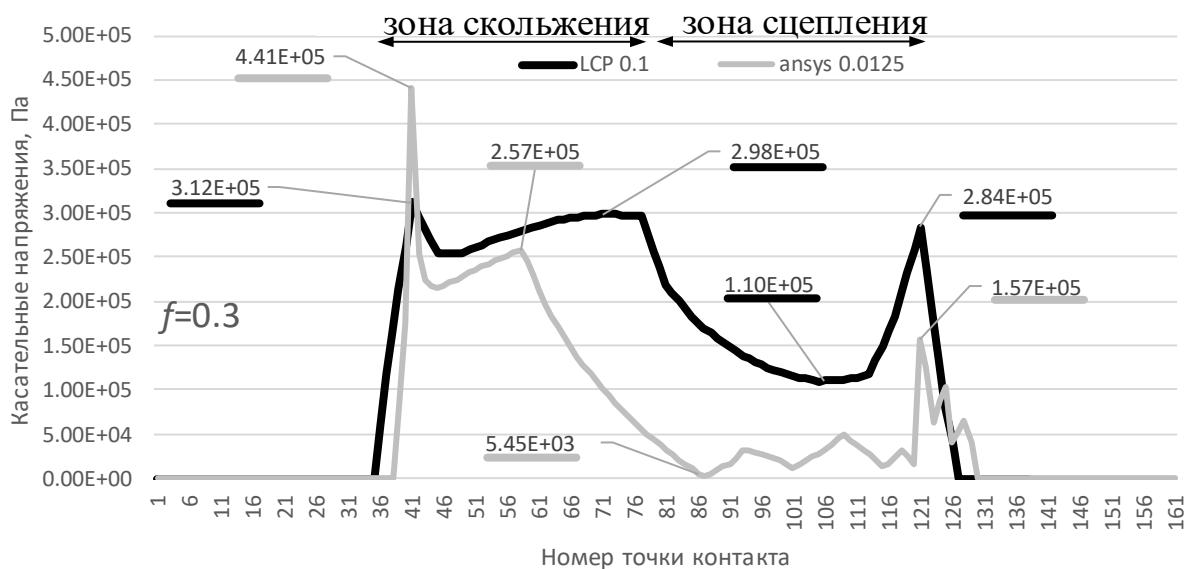


Рисунок 14 – Касательные напряжения при $f=0.3$. LCP(mesh=0.1), ANSYS(mesh=0.0125)

Из анализа результатов, представленных на рисунках 12-14 видно, что поведение решения сильно зависит от заданного коэффициента трения. При коэффициенте трения $f > 0.15$ полученное решение ANSYS по касательным контактным напряжениям начинает «осциллировать» в зоне сцепления (точки 78-127). В ANSYS при увеличении коэффициента трения с $f = 0.3$ до $f = 0.5$ получаемый результат качественно не изменяется (продолжает осциллировать). Время расчёта существенно возрастает в зависимости от коэффициента трения от 5 минут при $f = 0.1$ до 30 минут при $f = 0.5$.

Решение в ПК ANSYS и подобных может быть не получено из-за появления проблем со сходимостью. Это возможно: 1) если в процессе решения подобранная жёсткость контактных элементов начинает существенно влиять на получаемый результат; 2) если большая часть области контакта близка к отрыву.

Рассмотренный пример демонстрирует ограничения и сложности, возникающие при расчёте контактных задач в ПК ANSYS, которые отсутствуют в новой разработанной методике решения контактных задач. Для решения данной задачи в ContactLCP из параметров контактного взаимодействия потребовалось задать только коэффициент трения и шаговый алгоритм решения не требует регулировки параметров остановки процесса решения.

Пример 5. Односторонний контакт двух тел (рис. 15, а). Верхнее тело свободно лежит на нижнем. Система нагружена сосредоточенной силой F и собственным весом γ . Вырезается полоса шириной $t=1$ см и рассматривается задача плоской деформации. Деформированная схема показана на рис. 15, б.

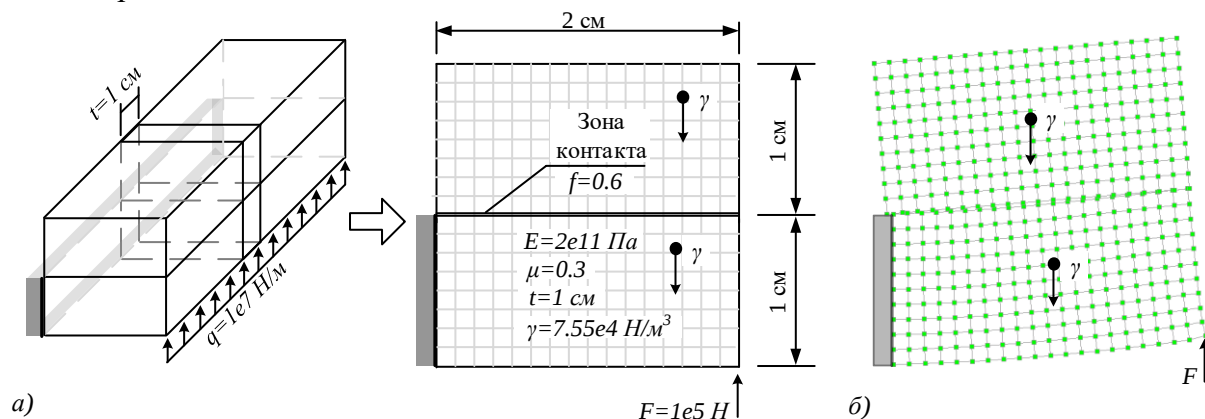


Рисунок 15 – Контакт двух пластин

На рис. 16 показаны усилия взаимодействия и взаимные перемещения по нормали и по касательной к зоне контакта.

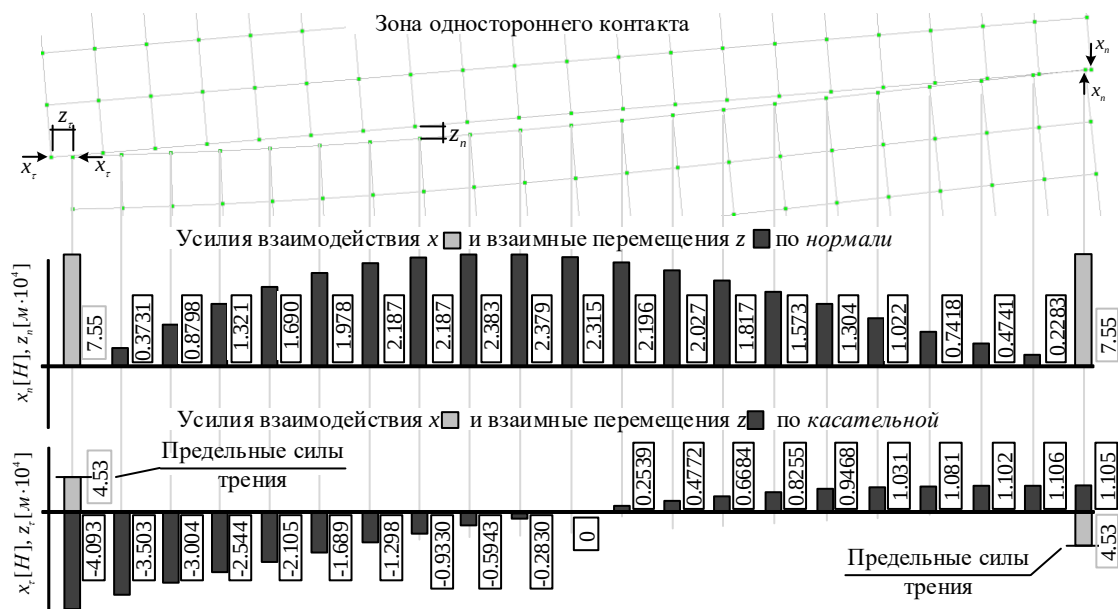


Рисунок 16 – Зона контакта двух пластин, усилия взаимодействия и взаимные перемещения

Рассмотренный пример 5 демонстрирует возможность расчёта задач, если одно из тел способно перемещаться как жёсткое целое и, когда скольжение реализуется по всей зоне контакта.

Пример 6. Расчет железобетонной подпорной стенки, взаимодействующей со скальным основанием (рис 17). Все размеры на расчетной схеме указаны в метрах, величины поверхностных нагрузок – в МПа. Учитывались: q_x и q_y – горизонтальное и вертикальное давление засыпки на боковые поверхности стенки; $q_{гр}$ – вертикальная пригрузка весом грунта засыпки; q_n и q_t – нагрузка по верхнему торцу фрагмента, передаваемая отсеченной частью конструкции; собственный вес фрагмента. Модули упругости бетона и скального основания равны соответственно $E_6 = 26500$ МПа, $E_o = 20000$ МПа; коэффициенты Пуассона – $\nu_6 = 0,15$, $\nu_o = 0,2$; объемный вес бетона – 24 кН/м³, коэффициент трения $f = 1,0$; напряженное состояние – плоская деформация. Объемный вес скального основания в число нагрузок не входил.

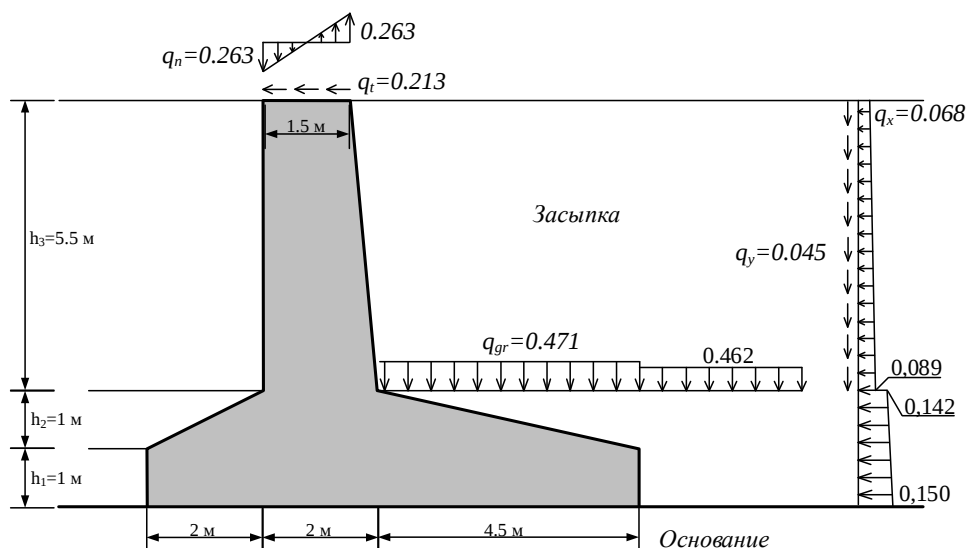


Рисунок 17 – Расчётная схема подпорной стенки

Задача решена Вовкушевским А.В. и Лукашевичем А.А. Результаты расчёта указанных авторов практически совпадают. Сравнение результатов расчёта разработанным алгоритмом с результатами Лукашевича А.А. приведено на рисунке 18. Показаны перемещения по горизонтали u , горизонтальные σ_x и вертикальные σ_y напряжения в зоне контакта.

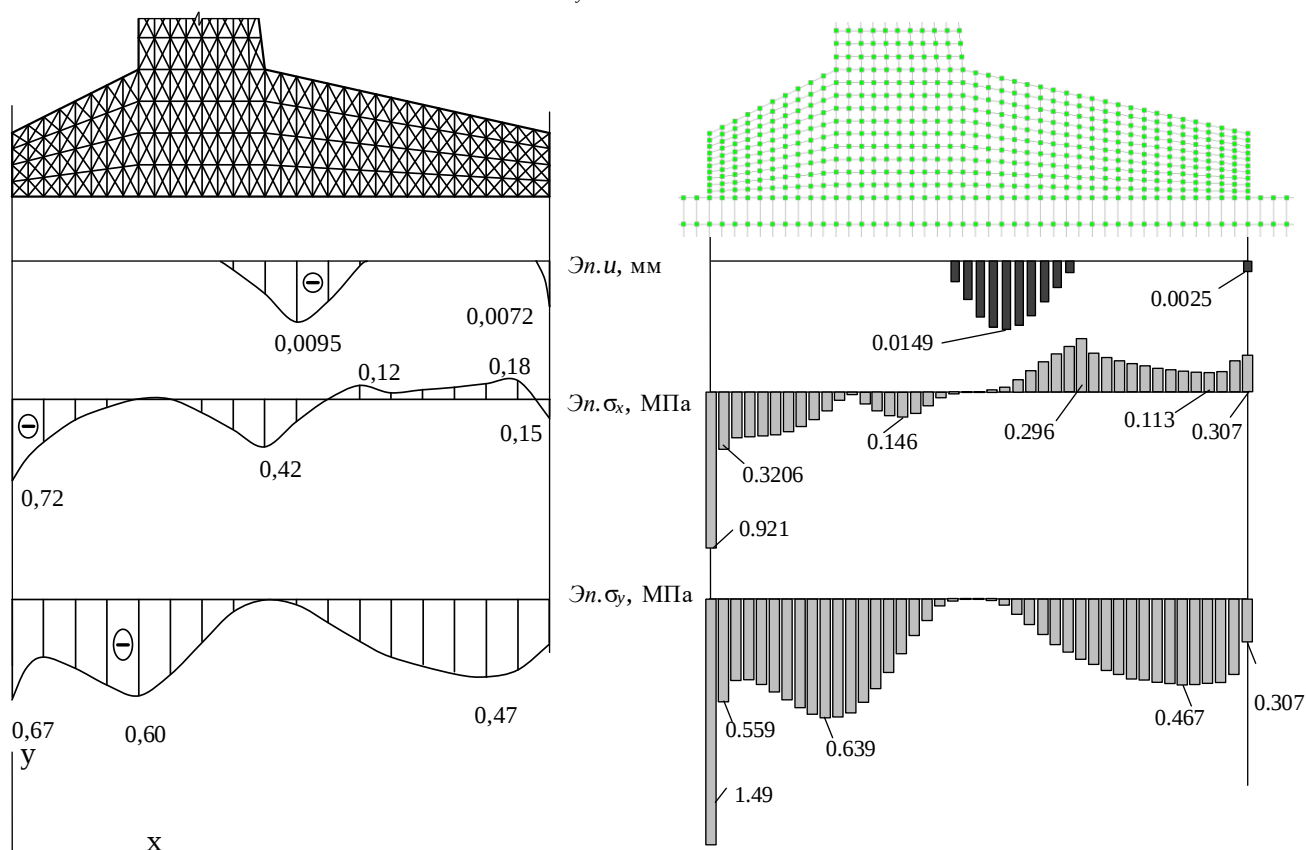


Рисунок 18 – Сравнение решений Лукашевича А.А. (слева) и Попова А.Н. (справа) по НДС в зоне контакта.

Разница в горизонтальных напряжениях доказывает положение о том, что задачи одностороннего контакта с трением могут иметь разные решения методами, которые учитывают и не учитывают историю нагружения.

Заключение

Выявлено наличие заранее задаваемых погрешностей в итерационных методах решения задач контакта деформируемых тел с учётом трения, которые влияют на точность получаемого решения. Это приводит к необходимости настройки множества параметров, влияющих на результат решения задачи, что предъявляет высокие требования к квалификации пользователя. Также выявлено отсутствие постановок задач одностороннего контакта с трением между деформируемыми телами в виде ЛЗД, которые не требуют подробной настройки параметров контакта. Найдена возможность решения ЛЗД шаговыми методами.

Получена новая постановка контактной задачи с трением в виде ЛЗД с использованием метода перемещений строительной механики, где нормальные и касательные усилия взаимодействия и взаимные перемещения в зоне контакта связываются через контактную матрицу жёсткости. Это ведёт к необходимости задавать только один параметр контакта – коэффициент трения, и позволяет использовать шаговый алгоритм решения.

Разработан новый метод расчёта контактной задачи с трением, основанный на её формулировке в виде ЛЗД. Произведена модификация алгоритма Лемке, позволяющая получить решение за конечное число шагов (задач, приводящих к заикливанию шагового процесса, не найдено). Изменено поведение алгоритма Лемке в случаях, когда в ходе решения наступает одновременный момент отрыва или касания нескольких контактных пар.

Новый метод расчёта реализован в программе ContactLCP. Показана и описана работа новых алгоритмов решения ЛЗД. Выявлены и приведены особенности расчета и ограничения использования нового метода решения контактных задач с трением. Проведена верификация разработанного метода сравнением полученных численных результатов с аналитическими результатами и результатами программного комплекса ANSYS. Показаны преимущества нового метода расчёта контактных задач с трением по сравнению с наиболее распространёнными численными итерационными методами решения этих задач.

В качестве перспектив дальнейших исследований рассматривается программная оптимизация работы новых алгоритмов решения линейной задачи дополненности. Предполагается также развитие методов решения задач, где необходим учёт комбинации конструктивной нелинейности с другими видами нелинейности, к расчёту таких объектов как: водопропускная труба в грунте, кинематические сейсмоизолирующие опоры, подпорная стенка в грунте и т. п. Предполагается рассмотреть задачу устойчивости склона откоса как контактную задачу с трением и разработать метод её решения.

Список публикаций автора:

Публикации BAK, SCOPUS, RSCI:

1. SCOPUS 2.1.9. Frictional contact problem in building constructions analysis. *Magazine of Civil Engineering*. 2020, №100(8), Article No. 10001, 11 с. URL: <https://engstroy.spbstu.ru/en/article/2020.100.1/> Соавторы: Ловцов А.Д.

2. BAK, RSCI 2.1.9. Контакт с трением в линейной задаче дополненности с учётом зазоров. *Строительная механика и расчет сооружений*. 2021, 297(4), С36 – 43. 7 с. DOI: 10.37538/0039-2383.2021.4.36.43 Соавторы: Ловцов А.Д.

3. BAK, RSCI 2.1.9. Алгоритм расчёта задачи одностороннего контакта с трением с нарастающим параметром внешней нагрузки. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023, №19(5), С. 491-501. DOI: <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-491-501> Соавторы: Ловцов А.Д.

4. BAK 2.1.9. Исследование контактных напряжений в узле опирания стальной балки с учётом величины заглубления в бетонную стену. *Вестник Инженерной школы ДВФУ*. 2024, №4(61), С. 96-104. DOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2024-4/96-104> Авторы: Долгачёв М.В., Попов А.Н.

Прочие публикации:

1. SCOPUS. The calculation of a culvert in a high mound of a road as a contact problem with friction. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018, Vol. 456, 8 с. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/456/1/012085> Соавторы: Ловцов А.Д.

2. ВАК. Расчёт системы труба-основание-насыпь как контактной задачи с трением. *Инженерный вестник Дона*. 2022, №8, 9 с. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2022/7850

3. ВАК. Влияние очертания водопропускной трубы в высокой насыпи дорожного полотна с учётом конструктивной нелинейности. *Инженерный вестник Дона*. 2023, №9, 12 с. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2023/8653

4. РИНЦ. Разгружающий эффект бокового давления грунта для большепролётных водопропускных труб. Материалы секционных заседаний 54-й студенческой научно-технической конференции ТОГУ. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. Ун-та, 2014. - С. 140 - 144, 4 с. Соавторы: Ловцов А.Д.

5. РИНЦ. Обтекание крутой арки грунтом. Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научно-практической конференции. Хабаровск: Изд-ва Тихоокеан. гос. Ун-та, 2014, Вып. 14, С. 331 - 335, 5 с. Соавторы: Ловцов А.Д. Фёдорова В. С.

6. РИНЦ. Расчёт водопропускной трубы как системы с идеальными односторонними связями. Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научно-практической конференции. Хабаровск: Изд-ва Тихоокеан. гос. Ун-та, 2016, Вып. 16, С 422 - 426, 5 с. Соавторы: Ловцов А.Д.

7. РИНЦ. Обеспечение единичной дислокации двух совпадающих узлов деформируемой системы с помощью нуль-элемента. Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса: материалы Международной научно-практической конференции. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017, Вып. 17, С. 503 – 508 6 с. Соавторы: Ловцов А.Д.

8. РИНЦ. Обоснование очертания поперечного сечения водопропускной трубы в высокой насыпи автомобильной дороги. Электронное научное издание: «Ученые заметки ТОГУ», 2018, №2. Соавторы: Ловцов А.Д. URL: <http://pnu.edu.ru/ejournal/pub/articles/2189/>

9. РИНЦ. Расчёт водопропускной трубы в высокой насыпи автомобильной дороги как контактной задачи с трением. VII Международный симпозиум. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ. 1-8 июля 2018, Новосибирск, Россия. Тезисы докладов 1 с. Соавторы: Ловцов А.Д.

Патенты и свидетельства:

1. ContactLCP: pat. 2022669000 USA. Россия: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2022.

Попов Александр Николаевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ КАК ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ АВТОРЕФЕРАТ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук